Seminar in Informatik: Deklarative Programmierung

Prof. Dr. M. Hanus, Dr. H. Kuchen
Lehrstuhl für Informatik II
RWTH Aachen

Vortrag Nr. 7:

Unifikation höherer Ordnung

Hans-Georg Eßer

System der Transformationsregeln $\mathcal{ST}$

$f \in \Sigma$

(1) Weglassen unifizierter Paare

$$\{\ \langle u, u \rangle\ \} \cup S \implies S$$

(2) Termzerlegung

$$\{\ \langle f(u_1, ..., u_n), f(v_1, ..., v_n) \rangle\ \} \cup S$$
$$\implies \{\ \langle u_1, v_1 \rangle, ..., \langle u_n, v_n \rangle\ \} \cup S$$

(3) Variablenelimination

$$\{\ \langle x, v \rangle\ \} \cup S \implies \{\ \langle x, v \rangle\ \} \cup S[v/x],$$

wo x Variable in S mit $x \notin FV(v)$.

Beispiel 3.6
$\langle f(x, g(a, y)),\ f(x, g(y, x)) \rangle$
$\implies_2 \langle x, x \rangle, \langle g(a, y), g(y, x) \rangle$
$\implies_1 \langle g(a, y), g(y, x) \rangle$
$\implies_2 \langle a, y \rangle, \langle y, x \rangle$
$\implies_3 \langle a, y \rangle, \langle a, x \rangle$.
liefert Unifikator $[a/x, a/y]$.

System der Transformationsregeln $\mathcal{HT}$ (1/2)

(1) Weglassen unifizierter Paare:

$$\{\ \langle u,u\rangle\ \} \cup S \Longrightarrow S$$

(2) Termzerlegung:

$$\{\langle \lambda\overline{x_k}.a(\overline{u_n}), \lambda\overline{x_k}.a(\overline{v_n})\rangle\} \cup S$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{1\le i\le n} \{\langle \lambda\overline{x_k}.u_i, \lambda\overline{x_k}.v_i\rangle\} \cup S$$

(a beliebiges Atom)

(3) Variablenelimination:
$u = \lambda\overline{x_k}.F(\overline{x_k})$, $v = \lambda\overline{x_k}.v'$, $F \notin FV(v)$:

$$\{\ \langle u,v\rangle\ \} \cup S \Longrightarrow \{\ \langle F, \lambda\overline{x_k}.v'\rangle\ \} \cup S[\lambda\overline{x_k}.v'/F]{\downarrow}$$

System der Transformationsregeln $\mathcal{HT}$ (2/2)

(4a) Imitation:

$$\{\ \langle \lambda\overline{x_k}.F(\overline{u_n}), \lambda\overline{x_k}.a(\overline{v_m})\rangle\ \} \cup S \Longrightarrow$$

$$\{\ \langle F,t\rangle, \langle \lambda\overline{x_k}.F(\overline{u_n}), \lambda\overline{x_k}.a(\overline{v_m})\rangle\ \} \cup S$$

($a \in \Sigma$ oder freie Var. $\neq F$ und t Imitationsbindung für a)

(4b) Projektion:

$$\{\ \langle \lambda\overline{x_k}.F(\overline{u_n}), \lambda\overline{x_k}.a(\overline{v_m})\rangle\ \} \cup S \Longrightarrow$$

$$\{\ \langle F,t\rangle, \langle \lambda\overline{x_k}.F(\overline{u_n}), \lambda\overline{x_k}.a(\overline{v_m})\rangle\ \} \cup S$$

(a Atom und $t = \lambda\overline{y_n}.y_i(\overline{\lambda\overline{z_{p_q}}.H_q(\overline{y_n},\overline{z_{p_q}})})$ Projektionsbindung, mit $Head(u_i) \in \Sigma \Longrightarrow Head(u_i) = a$)

(4c) partielle Bindung flexible/flexible

$$\{\ \langle \lambda\overline{x_k}.F(\overline{u_n}), \lambda\overline{x_k}.G(\overline{v_m})\rangle\ \} \cup S \Longrightarrow$$

$$\{\ \langle F,t\rangle, \langle \lambda\overline{x_k}.F(\overline{u_n}), \lambda\overline{x_k}.G(\overline{v_m})\rangle\ \} \cup S$$

wenn $t = \lambda\overline{y_n}.a(\overline{\lambda\overline{z_{p_m}}.H_m(\overline{y_n},\overline{z_{p_m}})})$ partielle Bindung ist, die zum Term $\lambda\overline{x_k}.F(\overline{u_n})$ paßt, so daß $a \neq F, G$.

$\boxed{\text{Nach Regeln (4x) Regel (3) auf } \langle F,t\rangle \text{ anwenden.}}$

Regeln der Lambda-Konversion:

(i) α-Konversion:

$$y \notin FV(t) \cup BV(t) \;\Rightarrow\; (\lambda x.t) \succ_\alpha (\lambda y.(t[y/x]))$$

(ii) β-Konversion:

$$((\lambda x.s)t) \succ_\beta s[t/x]$$

(iii) η-Konversion:

$$x \notin FV(t) \;\Rightarrow\; (\lambda x.(tx)) \succ_\eta t$$

β-Normalform: $t \to_\beta^* t{\downarrow}$

β-Äquivalenz: $s \xleftrightarrow{*}_\beta t \iff s{\downarrow} = t{\downarrow}$

Beispiel 4.11

Schreibweise: $\frac{\theta(e)}{\theta(e)\downarrow}$

$$\langle F(f(a)), f(F(a))\rangle$$

$$\Longrightarrow_{4a} \langle F, \underbrace{\lambda x.f(Y(x))}_{\text{imitiere } f(*)}\rangle, \langle \tfrac{\lambda x.f(Y(x)))f(a)}{f(Y(f(a)))}, f(\tfrac{\lambda x.f(Y(x)))a}{f(Y(a))})\rangle$$

$$\Longrightarrow_2 \langle F, \lambda x.f(Y(x))\rangle, \langle Y(f(a)), f(Y(a))\rangle$$

$$\Longrightarrow_{4b} \langle F, \lambda x.f(\tfrac{(\lambda x.x)x}{x})\rangle, \langle Y, \lambda x.x\rangle, \langle \tfrac{(\lambda x.x)f(a)}{f(a)}, f(\tfrac{(\lambda x.x)a}{a})\rangle$$

$$\Longrightarrow_1 \langle F, \lambda x.f(x)\rangle, \langle Y, \lambda x.x\rangle$$

Also ist $[\lambda x.f(x)/F] \in Unify(F(f(a)), f(F(a)))$.

Unifikation höherer Ordnung

Unifikationsproblem: Suche zu zwei Termen e_1, e_2 Substitution σ mit $\sigma(e_1) =_\beta \sigma(e_2)$.
$\longrightarrow$ Transformationssystem, das solche Substitutionen (=Unifikatoren) ausrechnet.

Beispiel 1.1

$$\langle f(x, f(h(x, g(x)), x')), f(x, f(h(f(y), z), y'))\rangle$$
$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{muß Arg. unif.}} \langle x, x\rangle, \langle f(h(x, g(x)), x'), f(h(f(y), z), y')\rangle$$

Generelle Transformationsregel: Termzerlegung

$$\{\ \langle f(u_1, ..., u_n), f(v_1, ..., v_n)\rangle\ \} \cup S$$
$$\Longrightarrow \{\ \langle u_1, v_1\rangle, ..., \langle u_n, v_n\rangle\ \} \cup S,$$

Zwei weitere Schritte:

$$\langle x, x\rangle, \langle x, f(y)\rangle, \langle g(x), z\rangle, \langle x', y'\rangle.$$

$\langle x, x\rangle$ bereits unifiziert $\rightarrow$ weglassen:

$$\langle x, f(y)\rangle, \langle g(x), z\rangle, \langle x', y'\rangle.$$

Allgemeine Regel:

$$\{\ \langle u, u\rangle\ \} \cup S\ \Longrightarrow S$$

Bindung für x muß Form $f(*)$ haben. Führe partielle Bindung für x ein: Ergänze $\langle x, f(x_1)\rangle$:

$$\langle x, f(x_1)\rangle, \langle x, f(y)\rangle, \langle g(x), z\rangle, \langle x', y'\rangle.$$

$[f(x_1)/x]$:

$$\langle x, f(x_1)\rangle, \langle f(x_1), f(y)\rangle, \langle g(f(x_1)), z\rangle, \langle x', y'\rangle.$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{Termzerl.}} \langle x, f(x_1)\rangle, \langle x_1, y\rangle, \langle g(f(x_1)), z\rangle, \langle x', y'\rangle.$$

Allgemeine Imitationsregel: x nicht in $f(t_1, ..., t_n)$:

$$\{\langle x, f(t_1, ..., t_n)\rangle\} \cup S \Longrightarrow$$
$$\{\langle x, f(y_1, ..., y_n)\rangle, \langle f(y_1, ..., y_n), f(t_1, ...t_n)\rangle\} \cup S',$$

$S' = S[f(y_1, ..., y_n)/x]$.

$\langle x, t\rangle \in S$, x nicht in t:

$$\{\langle x, t\rangle\} \cup S \Longrightarrow \{\langle x, t\rangle\} \cup S[t/x].$$

(Variablenelimination) Im Beispiel:

$$\langle x, f(y)\rangle, \langle x_1, y\rangle, \langle g(f(y)), z\rangle, \langle x', y'\rangle.$$

letztes System gelöst, da alle Paare gelöst.

Unifikator: $[f(y)/x, g(f(y))/z, y'/x']$.

Nun Terme höherer Ordnung.
Lambda-Kalkül: $\lambda x.f(x)$

Beispiel 1.2
$S = \{\langle F(f(a)), f(F(a))\rangle\}$: $\theta = [\lambda x.f(x)/F]$:

$$\theta(F(f(a))) = (\lambda x.f(x))f(a) \to f(f(a))$$

$$\theta(f(F(a))) = f((\lambda x.f(x))a) \to f(f(a))$$

$\exists$ andere Unif.: $\theta = [\lambda x.f^k(x)/F]$ für $k \geq 0$.

Part. Bindungen der Form $[f(y_1, ..., y_n)/x]$ verallgemeinern:

$$[\lambda \overline{x}.a(\overline{Y(\overline{x})})/F]$$

a atomar (d.h. Konst. oder Var.).

In Bsp. 1.2 hat part. Bindung für F, die f imitiert, die Form $\lambda x.f(Y(x))$:

$$\{\langle F(f(a)), f(F(a))\rangle\} \Longrightarrow$$

$$\{\langle F, \lambda x.f(Y(x))\rangle, \langle f(Y(f(a))), f(f(Y(a)))\rangle\}$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{Termzerl.}} \{\langle F, \lambda x.f(Y(x))\rangle, \langle Y(f(a)), f(Y(a))\rangle\}.$$

Imitationsregel nicht genug, um Bindungen aufzubauen: Partielle Bindung für Y?
$\to$ gleiches Problem wir bei F
$\to \infty$ Folge von Imitationen
(Problem: muß Bindungen wie $\lambda x.x$ finden)

Neue Regel (grob):

$$\{\langle \lambda \overline{x_k}.F(u_1, ..., u_n), \lambda \overline{x_k}.a(v_1, ..., v_m)\rangle\} \cup S \Longrightarrow$$

$$\{\langle F, t\rangle\} \cup \sigma(\{\langle \lambda \overline{x_k}.F(u_1, ..., u_n), \lambda \overline{x_k}.a(v_1, ..., v_m)\rangle\} \cup S),$$

wo $a \in \Sigma$, a Konstante oder Variable, t entweder Imitationsbindung

$$t = \lambda \overline{y_n}.a(Y_1(\overline{y_n}), ..., Y_m(\overline{y_n}))$$

oder Projektionsbindung

$$t = \lambda \overline{y_n}.y_i(Y_1(\overline{y_n}), ..., Y_q(\overline{y_n}))$$

und $\sigma = [t/F]$.

Im Beispiel: $\{\langle F(f(a)), f(F(a))\rangle\}$ durch Projektionsbindung in

$$\{\langle F, \lambda x.x\rangle, \langle F(f(a)), f(F(a))\rangle\}$$

transformieren. $[\lambda x.x/F]$ anwenden:

$$\{\langle F, \lambda x.x\rangle, \langle f(a), f(a)\rangle\}.$$

$$\Longrightarrow \{\langle F, \lambda x.x\rangle\}$$

Unifikator: $[\lambda x.x, F]$.

Korrektheit von $\mathcal{HT}$

Lemma 4.12: $S \Longrightarrow_{1/3} S'$, dann: $U(S) = U(S')$.

Beweis: Für (1) klar.

Zu (3): zeige $U(\{\langle F, v\rangle\} \cup S) = U(\{\langle F, v\rangle\} \cup \sigma(S)\!\downarrow)$, wo $F \notin FV(v)$, $\sigma = [v/F]$.

Allgemein: $\theta \in Unify(F, v) \Longrightarrow \theta =_\beta \sigma \circ \theta$.
D.h. ($\theta \in U(S) \iff \sigma \circ \theta \in U(S)$)
Außerdem $\sigma \circ \theta \in U(S) \iff \theta \in U(\sigma(S)\!\downarrow)$, da $\sigma \circ \theta(u) = \theta(\sigma(u)) \to_\beta^* \theta(\sigma(u)\!\downarrow)$
Insgesamt:

$$\begin{array}{rc} & \theta \in U(\{\langle F, v\rangle\} \cup S) \\ \iff & \theta(F) \xleftrightarrow{*}_\beta \theta(v) \text{ und } \theta \in U(S) \\ \iff & \theta(F) \xleftrightarrow{*}_\beta \theta(v) \text{ und } \sigma \circ \theta \in U(S) \\ \iff & \theta(F) \xleftrightarrow{*}_\beta \theta(v) \text{ und } \theta \in U(\sigma(S)\!\downarrow) \\ \iff & \theta \in U(\{\langle F, v\rangle\} \cup \sigma(S)\!\downarrow) \end{array}$$

Lemma 4.13: $S \Longrightarrow_2 S'$, dann: $U(S) \supseteq U(S')$.

Beweis: Sei

$$\langle \lambda \overline{x_k}.a(\overline{u_n}), \lambda \overline{x_k}.a(\overline{v_n}) \rangle$$

das Paar, das transf. wird, θ Substitution.

Sei $\theta \in U(S')$, also

$$\theta(\lambda \overline{x_k}.u_i) \overset{*}{\longleftrightarrow}_\beta \theta(\lambda \overline{x_k}.v_i),\ 1 \leq i \leq n$$

Dann:

$$\theta(\lambda \overline{x_k}.a(\overline{u_n})) = \lambda \overline{x_k}.\theta(a)(\theta(u_1), ..., \theta(u_n))$$

$$\overset{*}{\longleftrightarrow}_\beta \lambda \overline{x_k}.\theta(a)(\theta(v_1), ..., \theta(v_n)) = \theta(\lambda \overline{x_k}.a(\overline{v_n}))$$

Also gilt: $\theta \in U(S') \Longrightarrow \theta \in U(S)$.

Lemma 4.14: $S \Longrightarrow_{4x} S'$, dann: $U(S) \supseteq U(S')$.

Beweis: Transformationen (4x) bestehen aus zwei Schritten:

(i) S wird $\langle F, t \rangle$ hinzugefügt. Aus $S \subseteq \{\langle F, t \rangle\} \cup S$ folgt $U(S) \supseteq U(\{\langle F, t \rangle\} \cup S)$

(ii) Regel (3) wird angewandt: korrekt nach Lemma 4.12

Satz 4.15: Korrektheit von $\mathcal{HT}$
$S \Longrightarrow_{\mathcal{HT}} S'$, dann: $U(S) \supseteq U(S')$.

Beweis: Lemmata 4.12-4.14